

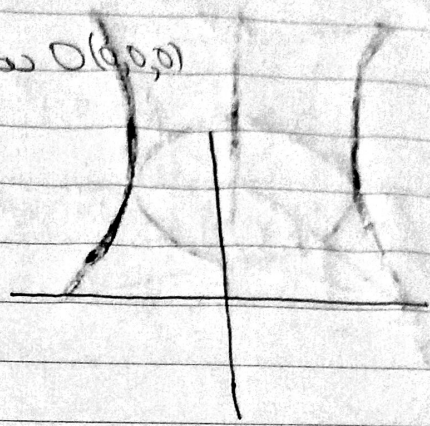
Ελλειψοειδές

93.5.4f

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{f^2} = 1, a, b, f > 0$$

→ Εξίσωση ελλειψοειδούς κέντρο $O(0,0,0)$
Αν έχουμε κέντρο $K(h,\eta,\mu)$

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-\eta)^2}{b^2} + \frac{(z-\mu)^2}{f^2} = 1$$



• Τύποι ελλειψοειδούς με επίπεδο (π.χ. $z=2$)

$$\Rightarrow \text{έλλειψν. } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{2^2}{f^2} \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{(a\sqrt{1-\frac{2^2}{f^2}})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{2^2}{f^2}})^2} = 1$$

→ προφανώς για να υπάρχει
τύπος, πρέπει $|2| < f$.

• Αν $a=b$ (ή $a=f$ ή $b=f$)

$\Rightarrow$ έχουμε ελλειψοειδές εκ περιστροφής, που προκύπτει από την περιστροφή της έλλειψης.

$$\left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{f^2} = 1, y=0 \right\} \text{ κύριο από τον άξονα } OZ.$$

$$\left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{f^2} = 1 \right|$$

γεωμ. περίπτωση ελλειψοειδούς:
 $\rightarrow ax^2 + by^2 + fz^2 + \delta = 0$, με δ ετερόσημο από a, b, f .

Υπερβολοειδών

$$\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{f^2} = 1 \text{ ή } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{f^2} = 1 \right)$$

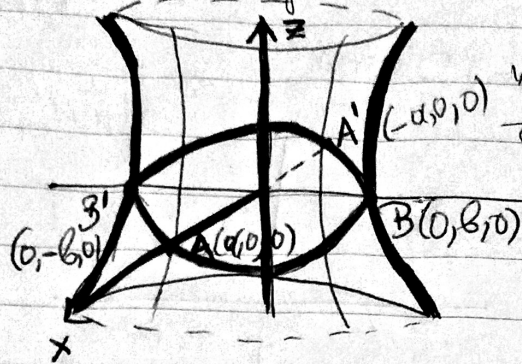
$$\text{ή } -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{f^2} = 1$$

→ μονόχυτο υπερβολοειδές.



- αν έχουμε 2 " - " η επιφάνεια καλείται δίκυνο υπερβολοειδές.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$



κέντρο του υπερβολ. το $O(0,0,0)$
και ο Oz (εκεί που δεν έχουμε
τύπη) λέγεται άξονας του
υπερβολοειδούς.

- Τύπη με επίπεδο $z=k \Rightarrow$ έλλειψη

$$\left\{ \frac{x^2}{(a\sqrt{1+\frac{k^2}{\gamma^2}})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{1+\frac{k^2}{\gamma^2}})^2} = 1, z=k \in \mathbb{R} \right\}$$

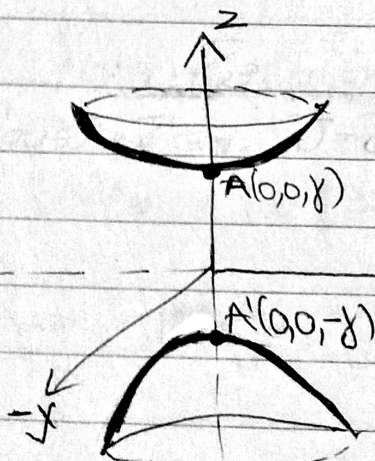
- Τύπη με επίπεδο $x=\eta$ (ή $y=\eta$), έχουμε υπερβολή:

$$\frac{y^2}{(b\sqrt{1-\frac{\eta^2}{a^2}})^2} - \frac{z^2}{(\gamma\sqrt{1-\frac{\eta^2}{a^2}})^2} = 1, x=\eta \in \mathbb{R}.$$

- Αν $a=b$, έχουμε μονόκυνο υπερβολοειδές εκ περιστροφής, που προκύπτει από την περιστροφή της υπερβολής:

$$\left\{ \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1, y=0 \right\} \text{ ή } \left\{ \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1, x=0 \right\}$$

Δίκυνο υπερβολοειδές: $\left(-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \text{ ή } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{\gamma^2} = 1 \right)$



ο άξονας Oz είναι ο άξονας του υπερβολοειδούς.

η τύπη του με τους άξονες είναι
μια στα άξονα του Oz .

- Τύπη του υπερβολ. με το επίπεδο $z=\eta$ (αρκεί $|\eta| > \gamma$, $\eta > \gamma$ ή $\eta < -\gamma$.)

έλλειψη: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{\eta^2}{\gamma^2} - 1 \Rightarrow$



$$\left\{ \frac{x^2}{(a\sqrt{\frac{x^2}{b^2}-1})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{\frac{y^2}{a^2}-1})^2} = 1, z=2 \right\}$$

- Τμήν του υπερβ. με $x=1$ (ή $y=1$) είναι υπερβολή
- $$\left\{ \frac{z^2}{(y\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{1+\frac{x^2}{a^2}})^2} = 1, x=1 \right\}$$

Αντίστοιχα αν $a=b$, για το $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, έχουμε σύστημα υπερβολοειδών εκ περιστροφής αν περιστρέψουμε της υπερβολής.

$$\left\{ \frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1, y=0 \right\} \text{ γύρω από τον } Oz.$$

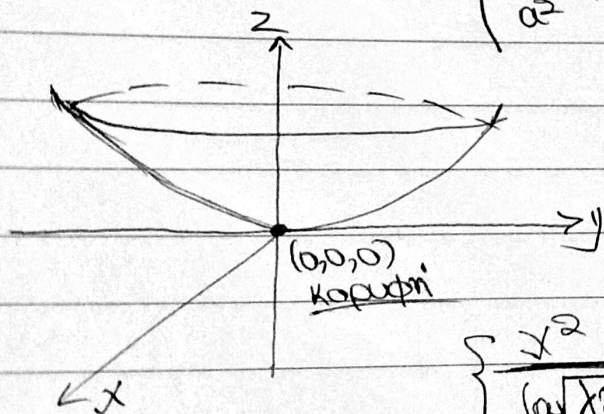
~ ΠΑΡΑΒΟΛΟΕΙΔΗ ~

ελλειπτικό παραβολή.

υπερβολικό παραβολή.

• Ελλειπτικό

Ορίζεται ως η επιφάνεια με εξίσωση της μορφής $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = f \cdot z$ με $a, b > 0$ και $f \neq 0$.



ο Oz είναι ο άξονας του παραβολοειδούς.

- Τμήν της $\textcircled{*}$ $z=1$ είναι ελλειψη.

$$\left\{ \frac{x^2}{(a\sqrt{f})^2} + \frac{y^2}{(b\sqrt{f})^2} = 1, z=1 \right\}$$

- $x=k$ ή $y=k$ έχουμε εξίσωση παραβολής.

- Αν $a=b \Rightarrow$ έχουμε ελλειπτ. παραβ. εκ περιστροφής γύρω από Oz .

της παραβολής $\left\{ \frac{x^2}{a^2} = f \cdot z, y=0 \right\}$

• Υπερβολικό παραβολοειδές

(εξ. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = f \cdot z$ $\textcircled{*}$ ή $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = b \cdot y$ ή $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = a \cdot x$)
 $a, b > 0, f \neq 0$

- ο Oz καλείται άξονας του παραβολοειδούς



Το μοναδικό σημείο τμήσης με άξονες είναι το $O(0,0,0)$ → κορυφή του παραβολοειδούς

- Τμήσι της $\square$ με $z=k$ ^{επίπεδο} έχει υπεβολή:

$$\left\{ \frac{x^2}{(b\sqrt{1-k^2})^2} - \frac{y^2}{(b\sqrt{1-k^2})^2} = 1, z=k \right\}$$

- Τμήσι της $\square$ με $x=a$ (ή $y=b$) έχει παραβολή:

$$\left\{ \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{z^2}{f^2}, x=a \right\}$$

Σχόλιο

- η $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{f^2} = 1$ ελλειψοειδές

Το ελλειψοειδές εγγράφεται σε σφαίρα $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{f^2} = 1$$